REŠAVANJE SISTEMA JEDNAČINA (METODA DETERMINANTI)

U prethodnim fajlovima smo govorili kako se rešavaju sistemi upotrebom matrica. U ovom fajlu ćemo pokušati da vam objasnimo kako se primenjuju **determinante** na rešavanje sistema linearnih jednačina.

Važno je napomenuti da ćemo ovde posmatrati samo kvadratne sisteme $S_{n\times n}$, to jest sisteme koji imaju jednak broj nepoznatih i jednačina. Profesori najčešće zadaju sisteme $S_{3\times 3}$ ili $S_{4\times 4}$, pa ćemo njima posvetiti pažnju.

Govorili smo već da sistem može biti **homogen** i **nehomogen**.

Pogledajmo najpre nehomogen sistem $S_{3\times 3}$ (tri jednačine , tri nepoznate):

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=t_1\\ a_2x+b_2y+c_2z&=t_2\\ a_3x+b_3y+c_3z&=t_3 \end{aligned}$$

Odavde najpre formiramo **determinantu sistema** uzimajući brojeve ispred nepoznatih: $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

Zatim članove **uz *x*** zamenimo slobodnim članovima (sa desne strane jednakosti): $D_x=\begin{vmatrix} t_1 & b_1 & c_1\\ t_2 & b_2 & c_2\\ t_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

Članove **uz *y*** zamenimo slobodnim članovima: $D_y=\begin{vmatrix} a_1 & t_1 & c_1\\ a_2 & t_2 & c_2\\ a_3 & t_3 & c_3\end{vmatrix}$

Članove **uz *z*** zamenimo slobodnim članovima: $D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & t_1\\ a_2 & b_2 & t_2\\ a_3 & b_3 & t_3\end{vmatrix}$

Na ovaj način smo dobili četiri determinante :

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\quad D_x=\begin{vmatrix} t_1 & b_1 & c_1\\ t_2 & b_2 & c_2\\ t_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & t_1 & c_1\\ a_2 & t_2 & c_2\\ a_3 & t_3 & c_3\end{vmatrix}\quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & t_1\\ a_2 & b_2 & t_2\\ a_3 & b_3 & t_3\end{vmatrix}$$

U svakom zadatku nam je prvi posao da nadjemo vrednosti za ove determinante.

Dalje rešenja tražimo koristeći **Kramerovu teoremu**:

i) **Ako je determinanta sistema** $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **različita od nule** , **onda sistem ima jedinstveno rešenje koje tražimo preko:** $x=\frac{D_x}{D}$; $y=\frac{D_y}{D}$; $z=\frac{D_z}{D}$

ii) **Ako je determinanta sistema** $D=0$ **i** $D_x=D_y=D_z=0$ **sistem ima beskonačno mnogo rešenja (neodredjen je) ili se može desiti da sistem nema rešenja.**

iii) **Ako je determinanta sistema** $D=0$ **i** $D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0 \vee D_z \neq 0$ **(znači, bar jedna od ove tri determinante da je različita od nule) sistem je nemoguć, to jest nema rešenja.**

Pazite, sve ovo važi za nehomogen sistem.

Šta ako imamo homogen sistem?

Ako posmatramo homogen sistem :
$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z&=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z&=0 \end{aligned}$$

Jasno je da on uvek ima **trivijalna** rešenja $(x,y,z)=(0,0,0)$

Kvadratni homogen sistem ima netrivijalna rešenja ako i samo ako je $D=0$

Znači, da bi naš homogen sistem imao netrivijalna rešenja, mora biti $\boxed{D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0}$

Razmišljanje za sisteme $S_{4\times 4}$ (4 jednačine, 4 nepoznate) je potpuno analogno sa ovim, s tim da nas ovde čeka mnogo veći posao kod nalaženja vrednosti determinanata:

Posmatrajmo sistem : $\begin{matrix} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t=u_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2t=u_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3t=u_3 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4t=u_4 \end{matrix}$. Ovde tražimo sledeće determinante:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad D_x=\begin{vmatrix} u_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ u_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ u_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ u_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & u_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & u_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & u_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & u_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & u_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & u_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & u_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad D_t=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & u_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & u_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & u_4 \end{vmatrix}$$

Rešenja tražimo:

$x=\frac{D_x}{D}; \quad y=\frac{D_y}{D}; \quad z=\frac{D_z}{D}; \quad t=\frac{D_t}{D}$, naravno sve po Kramerovoj teoremi...

Ako je homogen sistem:

$$\begin{matrix} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2t=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3t=0 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4t=0 \end{matrix}$$

za njega isto važi da ima netrivijalna rešenja ako je $D=0$.

ZADACI

1. Rešiti sistem jednačina:

$$\begin{matrix} x+2y-5z=6 \\ 2x+y+2z=5 \\ -3x+3y-4z=8 \end{matrix}$$

Rešenje:

Naravno, ovaj sistem je mnogo lakše rešiti Gausovom metodom ili nekom drugom, ali pošto proučavamo determinante, ovom prilikom ćemo ići težim putem:

Izračunavamo vrednosti sledećih determinanti(mi ćemo koristiti **Sarusovo pravilo** sa dopisivanjem prve dve kolone a vi možete i razvijati determinantu…kako vam je lakše…)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{matrix} = -4-12-30+16-6-15 = -51 \rightarrow \boxed{D = -51}$$

Pošto je determinanta sistema različita od nule, odmah znamo da će sistem imati jedinstveno rešenje.

Idemo dalje:

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 2 \\ 5 & 1 \\ 8 & 3 \end{matrix} = -24+32-75+40-36+40 = -23 \rightarrow \boxed{D_x = -23}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & 8 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & 8 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ -3 & 8 \end{matrix} = -20-36-80+48-16-75 = -179 \rightarrow \boxed{D_y = -179}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{matrix} = 8-30+36-32-15+18 = -15 \rightarrow \boxed{D_z = -15}$$

Kramerova teorema nam daje sledeće rešenje:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-23}{-51} = \frac{23}{51}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-179}{-51} = \frac{179}{51}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-15}{-51} = \frac{5}{17}$$

2. U zavisnosti od parametra a , diskutovati i rešiti sistem:

$$\begin{aligned} ax+y+z&=1\\ x+ay+z&=a\\ x+y+az&=a^2 \end{aligned}$$

Rešenje:

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}\begin{matrix} a & 1\\ 1 & a\\ 1 & 1 \end{matrix}=a^3+1+1-a-a-a=a^3-3a+2$$

$$a^3-3a+2=a^3-a-2a+2=a(a^2-1)-2(a-1)=a(a-1)(a+1)-2(a-1)=(a-1)(a^2+a-2)=$$
$$=(a-1)(a-1)(a+2)=(a-1)^2(a+2)$$

$$\boxed{D=(a-1)^2(a+2)}$$

Ovde nije dovoljno samo naći vrednost determinante, već to rešenje moramo spakovati u proizvod.

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ a & a & 1\\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ a & a & 1\\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1\\ a & a\\ a^2 & 1 \end{matrix}=a^2+a^2+a-a^2-1-a^3=-a^3+a^2+a-1=-a^2(a-1)+1(a-1)=$$

$$(a-1)(-a^2+1)=(a-1)(1-a)(1+a)=-(a-1)(a-1)(1+a)=-(a-1)^2(a+1)$$

$$\boxed{D_x=-(a-1)^2(a+1)}$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix}\begin{matrix} a & 1\\ 1 & a\\ 1 & a^2 \end{matrix}=a^3+1+a^2-a-a^3-a=a^2-2a+1=(a-1)^2$$

$$\boxed{D_y=(a-1)^2}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 1 \end{matrix} = a^4 + a + 1 - a^2 - a^2 - a = a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2-1)^2 = (a-1)^2(a+1)^2$$

$$\boxed{D_z = (a-1)^2(a+1)^2}$$

Završili smo tehnički deo posla, našli rešenja i spakovali ih. Naš savet je da ih sada prepišete, jer sledi diskusija:

$$D = (a-1)^2(a+2)$$
$$D_x = -(a-1)^2(a+1)$$
$$D_y = (a-1)^2$$
$$D_z = (a-1)^2(a+1)^2$$

Kramer kaže da sistem ima jedinstveno rešenje ako je $D \neq 0$.

U ovom slučaju mora biti:

$$D \neq 0 \rightarrow (a-1)^2(a+2) \neq 0 \rightarrow a \neq 1 \wedge a \neq -2$$

Ako je $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-\cancel{(a-1)^2}(a+1)}{\cancel{(a-1)^2}(a+2)} = -\frac{a+1}{a+2} \rightarrow \boxed{x = -\frac{a+1}{a+2}}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\cancel{(a-1)^2}}{\cancel{(a-1)^2}(a+2)} = \frac{1}{a+2} \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{a+2}}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\cancel{(a-1)^2}(a+1)^2}{\cancel{(a-1)^2}(a+2)} = \frac{(a+1)^2}{a+2} \rightarrow \boxed{z = \frac{(a+1)^2}{a+2}}$$

Ali ovde posao nije gotov, jer moramo ispitati šta se dešava ako je $a = 1$, pa ako je $a = -2$.

$\underline{za \;\; a=1}$

$D=(a-1)^2(a+2)=(1-1)^2(1+2)=0$

$D_x=-(a-1)^2(a+1)=-(1-1)^2(1+1)=0$

$D_y=(a-1)^2=(1-1)^2=0$

$D_z=(a-1)^2(a+1)^2=(1-1)^2(1+1)^2=0$

Po Krameru ovde sistem ima beskonačno mnogo rešenja, vraćamo se u početni sistem i zamenjujemo $a=1$.

$$\boxed{\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1x+y+z=1 \\ x+1y+z=1 \\ x+y+1z=1^2 \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}}$$

$x+y+z=1 \rightarrow z=1-x-y$

Sistem je neodredjen a rešenja opisujemo sa $(x,y,z)=(x,y,1-x-y)$ $\quad$ x ∈ R,y ∈ R

Napomena: Neki profesori zahtevaju da se uvede neko novo slovo(slova) kod opisivanja rešenja, recimo:

$(p,q,1-p-q)$ $\quad$ p ∈ R,q ∈ R

Naš savet je kao i uvek isti: radite kako zahteva vaš profesor…ne talasajte…

$\underline{za \;\; a=-2}$

$D=(a-1)^2(a+2)=(-2-1)^2(-2+2)=0$

$D_x=-(a-1)^2(a+1)=-(-2-1)^2(-2+1)=-9\cdot(-1)=9 \rightarrow \boxed{D_x \neq 0}$

Ne moramo menjati dalje, po Krameru, ovde je sistem **nemoguć**.

3. U zavisnosti od parametra *a* , diskutovati i rešiti sistem:

$$\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ ax+4y+z=0 \\ 6x+(a+2)y+2z=0 \end{array}$$

Rešenje:

Najpre uočimo da je sistem homogen, to jest da uvek ima trivijalno rešenje (0,0,0).

Da bi ovaj sistem imao i netrivijalna rešenja determinanta sistema mora biti baš jednaka nula.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 4 & 1\\ 6 & a+2 & 2\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 4 & 1\\ 6 & a+2 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 1\\ a & 4\\ 6 & a+2\end{matrix}=8+6+a(a+2)-2a-(a+2)-24=14+a^2+2a-2a-a-2-24=a^2-a-12$$

$$a^2-a-12=0\to a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}\to a_1=4;a_2=-3$$

Sad moramo ispitati za **oba** rešenja šta se dešava. Vraćamo ove vrednosti u početni sistem :

$\underline{za\ \ a=4}$

$x+y+z=0$

$4x+4y+z=0$

$\underline{6x+(4+2)y+2z=0}$

$x+y+z=0$

$4x+4y+z=0$

$\underline{6x+6y+2z=0}......./:2$

$x+y+z=0$

$4x+4y+z=0$

$\underline{3x+3y+z=0}$

$II-III\to x+y=0\to \boxed{y=-x}\to x+y+z=0\to \boxed{z=0}$

Rešenja su: $(x,y,z)=(x,-x,0)\quad x\in R$

$\underline{za\ \ a=-3}$

$x+y+z=0$

$-3x+4y+z=0$

$\underline{6x+(-3+2)y+2z=0}$

$x+y+z=0$

$-3x+4y+z=0$

$\underline{6x-y+2z=0}$

$III+I\to 7x+3z=0\to \boxed{x=\frac{-3z}{7}}$

$x+y+z=0\to\frac{-3z}{7}+y+z=0\to y=-z+\frac{3z}{7}\to\boxed{y=\frac{-4z}{7}}$

Rešenja su: $(x,y,z)=(\frac{-3z}{7},\frac{-4z}{7},z)\quad z\in \mathrm{R}$

За одељења III_3 и III_4 за период 27.4. - 30.4.

Домаћи задатак:

1. Користећи Крамерову теорему решити систем:

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 2x+4y-6z&=-2\\ -x+2y+6z&=4 \end{aligned}$$

2. У зависности од параметра a, дискутовати и решити систем:

$$\begin{aligned} 2x+y-z&=-1\\ -4x-2y+az&=a\\ (a-1)\cdot x+y+z&=2 \end{aligned}$$